Superfici topologiche: un'introduzione superficiale[1]

We mathematicians need to put far greater effort into communicating mathematical *ideas*.
William P. Thurston [a]

[a]in page 168 of On proof and progress in mathematics Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 30 (1994), no. 2, 161-177.

Dopo aver mostrato vari esempi di superfici, ad esempio il toro, la bottiglia di Klein, etc., spieghero' in maniera informale i diversi modi di rappresentare le superfici compatte. In particolare, cerchero' di far capire la definizione di superficie e quella di equivalenza topologica, cioe' di omeomorfismo. Infine enuncero' il teorema di classificazione delle superfici compatte dando qualche idea della dimostrazione.

[1]Antonio J. Di Scala, Politecnico di Torino, 29/11/2012
http://calvino.polito.it/~adiscala

1 Motivazione ed esempi

intro http://www.youtube.com/watch?v=XOP8ulfpCiU&feature=related

provo http://www.youtube.com/watch?v=S5fPwE7GQOA

cisnes http://www.youtube.com/watch?feature=endscreen&v=PqW47Mt8AsQ&NR=1

toro http://www.youtube.com/watch?v=OH5_h-RBOT8&feature=related

Botella http://www.youtube.com/watch?v=E8rifKlq5hc&feature=relmfu

juegos http://www.geometrygames.org/

2 Cosa e' una superficie ?

- il piano $\mathbb{R}^2$
- La sfera S^2
- Il toro $\mathbb{T}^2$
- il nastro di Möbius
- Il piano proiettivo reale $\mathbb{RP}^2$
- la bottiglia di Klein $\mathbb{K}$

Anatomia

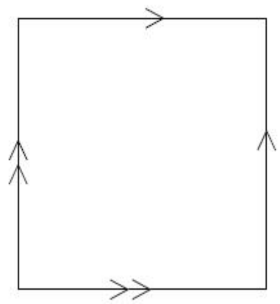
Il Giardino delle Sculture Fluide di Giuseppe Penone
Torino, La Venaria Reale.

2.1 Identification of a square

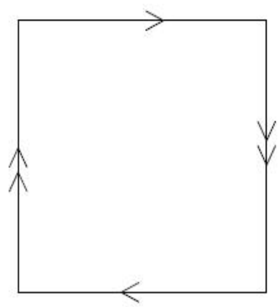
$aba^{-1}b^{-1}$

Toro

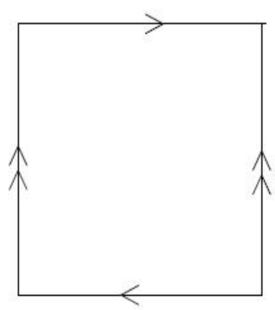
- *The sphere*



- *Projective space*



- *The Klein bottle*

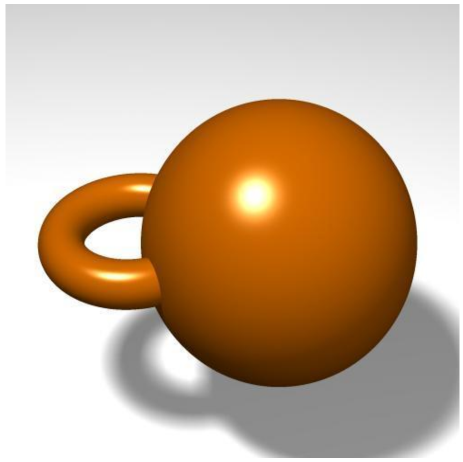


http://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/hitchinnotes/Geometry_of_surfaces/Chapter_1_Topology.pdf

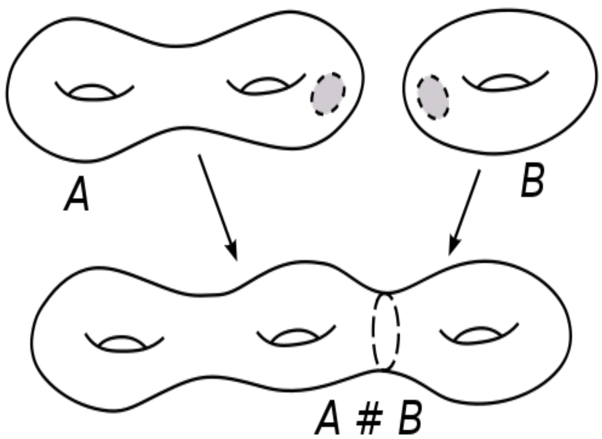
The Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach is an international research centre situated in the German Black Forest.

More about the Boy surface at Oberwolfach

2.2 La sfera con maniche e la somma connessa



http://en.wikipedia.org/wiki/Connected_sum



Due cose importanti:

- $\mathbb{K} \# \mathbb{T}^2 = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$
- $\mathbb{K} = \mathbb{RP}^2 \# \mathbb{RP}^2$

Il genere ?

3 Definizioni, teoria ed esercizi

3.1 Spazi topologici

Definizione: http://en.wikipedia.org/wiki/Topological_space

Ecco lo Spazio di Sierpinski :

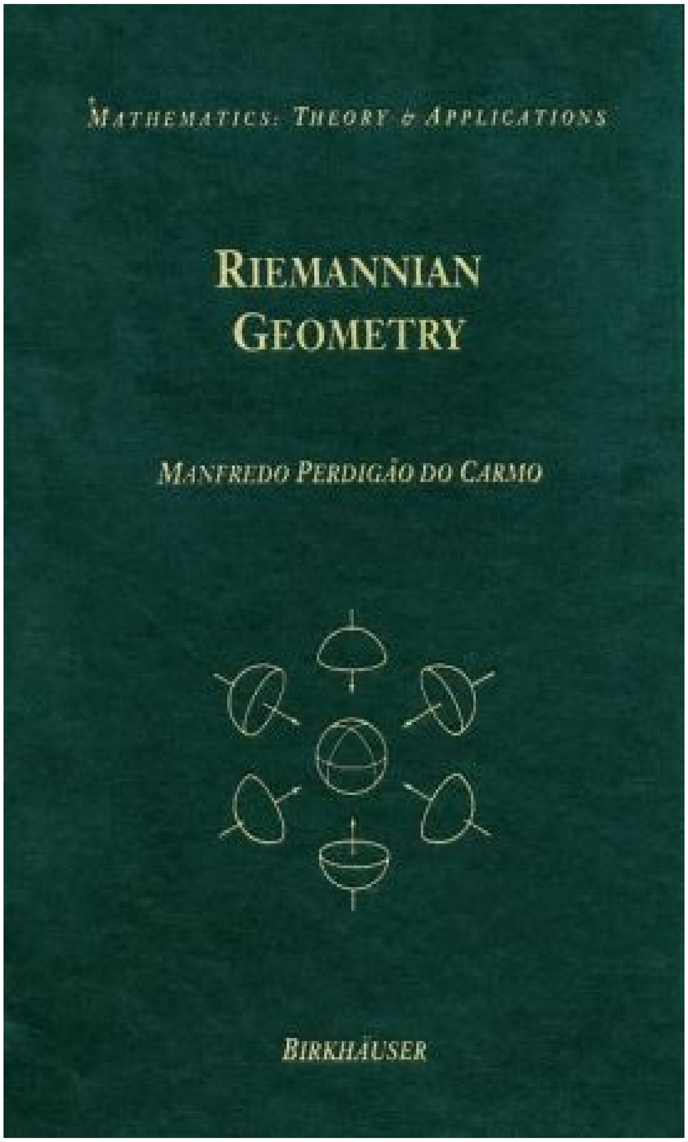
$$X = \{p, q\}$$

$$\tau = \{\emptyset, \{p\}, X\}$$

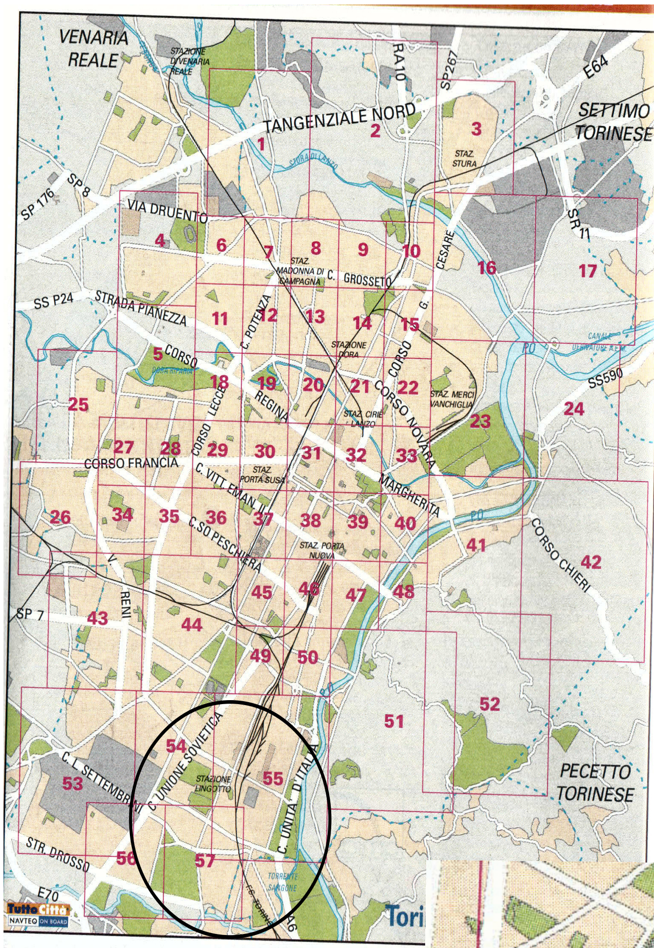
3.2 Funzioni continue tra spazi topologici

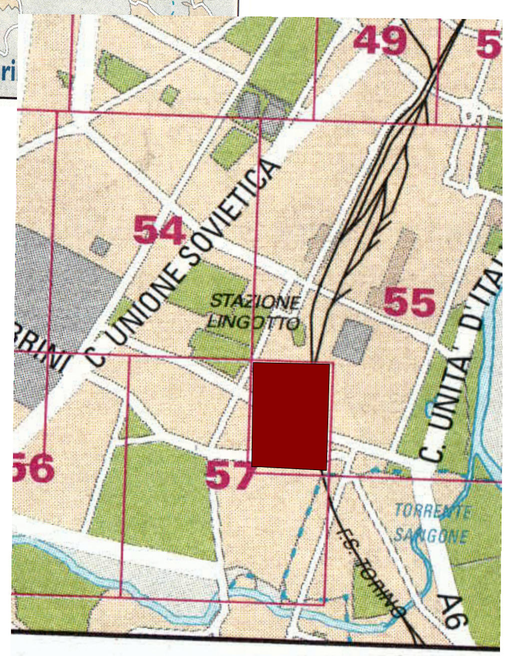
Esercizio: Trovare tutte le funzioni continue $f : X \to \mathbb{R}$ dove X e' lo spazio di Sierpinski.

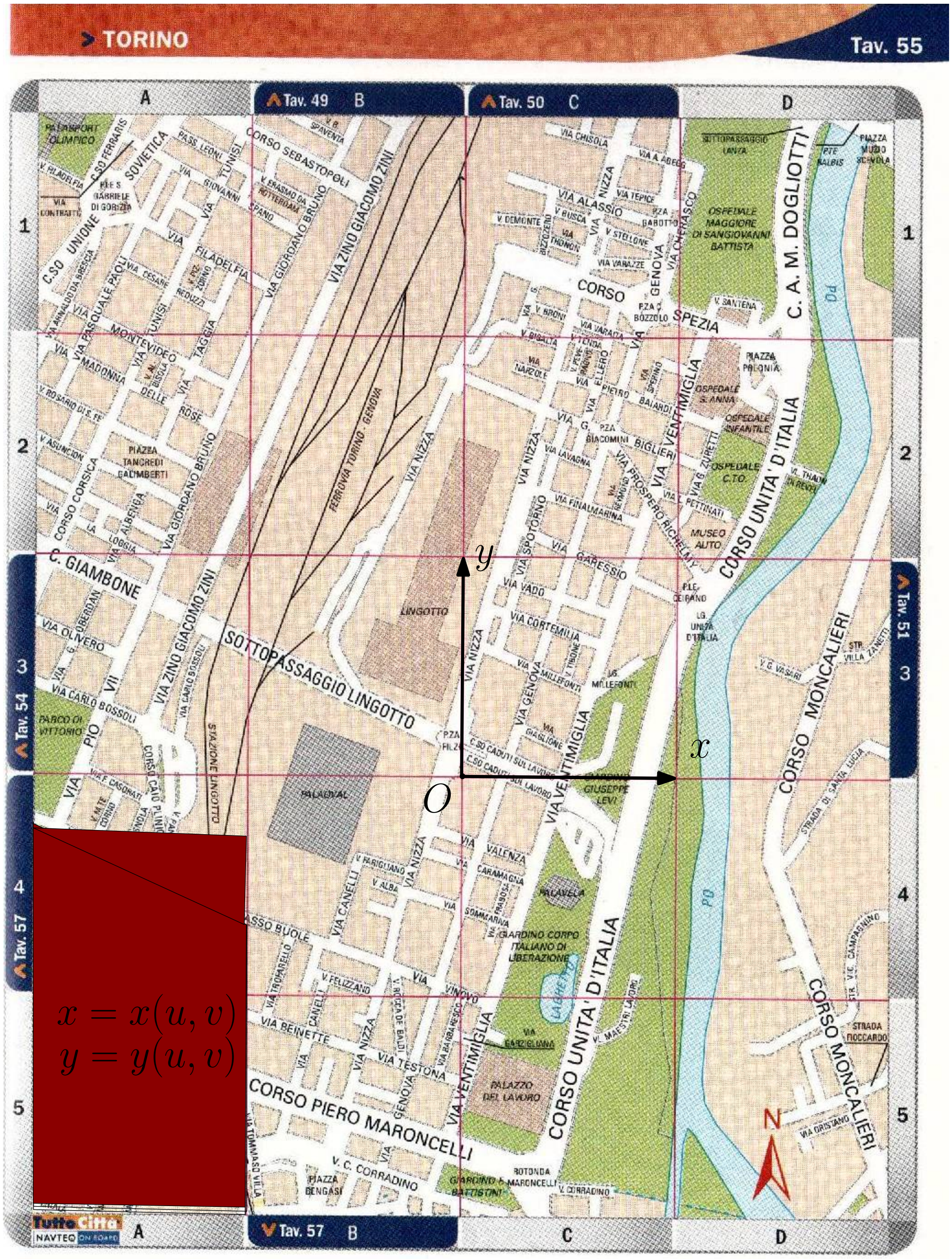
3.3 Atlante, carte e coordinate



$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

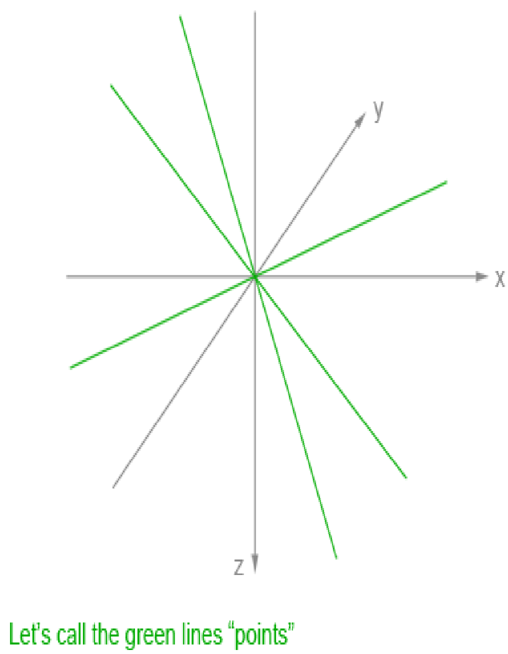

VENARIA REALE
STAZIONE DI VENARIA REALE
TANGENZIALE NORD
RA10
SP267
E64
SETTIMO TORINESE
STAZ. STURA
SP 176
SP 8
VIA DRUENTO
SR 11
CESARE
STAZ. MADONNA DI CAMPAGNA
C. GROSSETO
SS P24
STRADA PIANEZZA
C. POTENZA
STAZIONE DORA
CORSO
CORSO LECCE
REGINA
CORSO NOVARA
STAZ. MERCI VANCHIGLIA
STAZ. CIRIE LANZO
SS590
CORSO FRANCIA
C. VITT. EMAN. II
STAZ. PORTA SUSA
MARGHERITA
C.SO PESCHIERA
STAZ. PORTA NUOVA
CORSO CHIERI
V. RENI
SP 7
PO
C. UNIONE SOVIETICA
STAZIONE LINGOTTO
C. L. SETTEMBRINI
C. UNITA' D'ITALIA
STR. DROSSO
E70
TORRENTE SANGONE
A6
PECETTO TORINESE
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
TuttoCittà
NAVTEQ ON BOARD

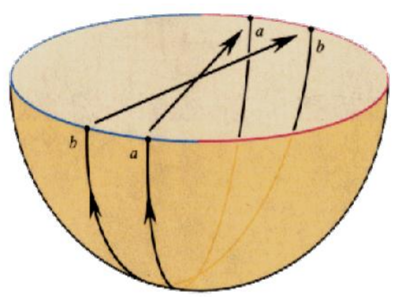

49
54
C. UNIONE SOVIETICA
STAZIONE LINGOTTO
55
C. UNITA' D'ITA
56
57
TORRENTE SANGONE
F.S. TORINO
A6

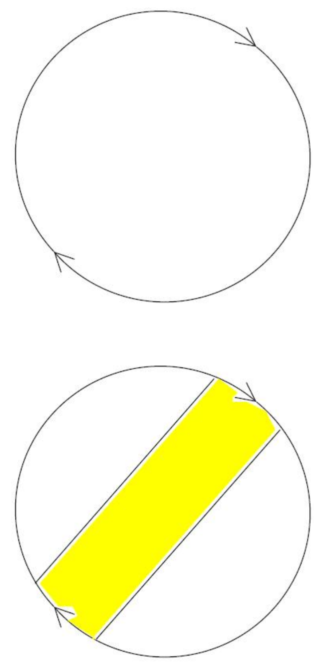

TORINO
Tav. 55
Tav. 49
Tav. 50
Tav. 51
Tav. 54
Tav. 57
A
B
C
D
1
2
3
4
5
PALASPORT OLIMPICO
CORSO SEBASTOPOLI
VIA ZINO GIACOMO ZINI
VIA GIORDANO BRUNO
C.SO UNIONE SOVIETICA
VIA FILADELFIA
VIA NIZZA
VIA ALASSIO
OSPEDALE MAGGIORE DI SANGIOVANNI BATTISTA
C. A. M. DOGLIOTTI
CORSO SPEZIA
VIA MONTEVIDEO
VIA MADONNA DELLE ROSE
PIAZZA TANCREDI GALIMBERTI
FERROVIA TORINO - GENOVA
VIA VENTIMIGLIA
OSPEDALE S. ANNA
OSPEDALE INFANTILE
OSPEDALE C.T.O.
VIA PROSPERO RICHELMY
MUSEO AUTO
CORSO UNITA' D'ITALIA
C. GIAMBONE
VIA GARESSIO
LINGOTTO
SOTTOPASSAGGIO LINGOTTO
VIA CORTEMILIA
VIA CARLO BOSSOLI
PARCO DI VITTORIO
CORSO MONCALIERI
PALAVELA
PALAZZO DEL LAVORO
GIARDINO CORPO ITALIANO DI LIBERAZIONE
CORSO PIERO MARONCELLI
VIA TESTONA
VIA BENEVENTO
PO
N
y
x
O
$x = x(u, v)$
$y = y(u, v)$


TORINO
Tav. 57
Tav. 54
Tav. 55
Tav. 56
A
B
C
D
1
2
3
4
5
CORSO TRAIANO
VIA ONORATO VIGLIANI
VIA CERCENASCO
PIAZZA TERESA CONFALONIERI
VIA DONATO BACHI
VIA STAMPA
VIA PIO VII
STRADA BASSE DEL LINGOTTO
VIA CAROLINA INVERNIZIO
PIAZZA PIETRO FRANCESCO GUALA
VIA P. F. GUALA
VIA PIOBESI
VIA MATTEO BARTOLI
VIA GIULIO GIANELLI
CORSO BENEDETTO CROCE
VIA PIACENZA
VIA DUINO
VIA LUIGI PALMA DI CESNOLA
VIA SETTE COMUNI
GIARDINO NINO FARINA
VIA A. FORTUNATO FORMIGGINI
VIA ONORATO VIGLIANI
VIA CAMILLO GUIDI
VIA LUIGI CHIALA
VIA CANDIOLO
VIA DOMENICO MILLELIRE
VIA FRATELLI DE MAISTRE
VIA MODESTO PANETTI
VIA EMANUELE ARTOM
VIA CARLO PISACANE
VIA FRANCESCO RISMONDO
VIA FRATELLI GARRONE
VIA SAPRI
VIA SOMALIA
VIA CESARE BATTISTI
PIAZZA DANTE ALIGHIERI
VIA CARDUCCI
VIA SAURO
VIA CORMONS
V. F. BARACCA
VIA SESTRIERE
VIA GUIDO FUBINI
PARCO PUBBLICO GUSTAVO COLONNETTI
STRADA CASTELLO DI MIRAFIORI
MONCALIERI
VIA SOMALIA
VIA NATALE PALLI
PIAZZA BRENNERO
VIA MIRAFIORI
TORRENTE SANGONE
TuttoCittà
NAVTEQ ON BOARD
$u = u(x, y)$
$v = v(x, y)$
v
u
O'

3.4 The real projective plane $\mathbb{RP}^2$







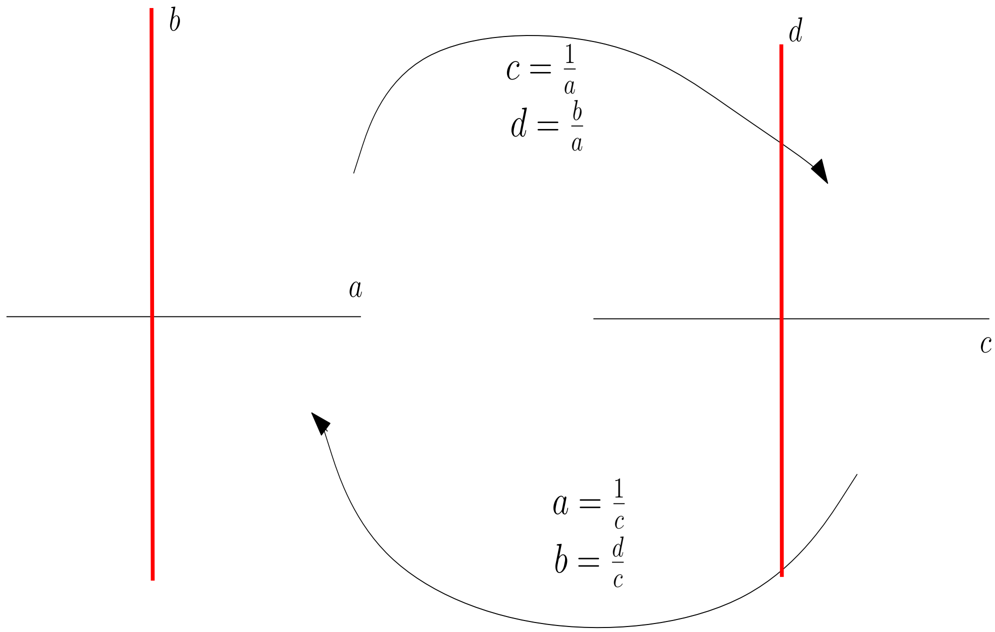
Il piano proiettivo reale $\mathbb{RP}^2$

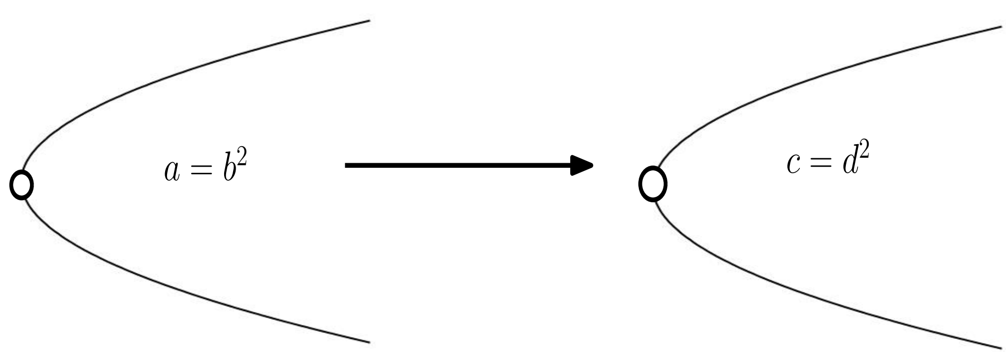
$\mathbb{RP}^2$ ha un atlante con soltanto 3 carte !!

C1: (a, b) parametriza le rette generate da un vettore della forma $(1, a, b)$

C2: (c, d) parametriza le rette generate da un vettore della forma $(c, 1, d)$

C3: (e, f) parametriza le rette generate da un vettore della forma $(e, f, 1)$





3.5 Superfici e varieta' topologica: coordinate C^k ?

3.6 Geometria Algebrica: le curve piane.

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^4$$

4 The classification Theorem

4.1 Triangulations

Triangulation

Caratteristica di Eulero $\chi = V - E + F$ che e' uguale ad $2-2g$ la superfici e' orientabili e $2-g$ nel caso non orientabili.

piu' su triangolazzioni

http://www.math.osu.edu/~fiedorowicz.1/math655/classification.html

Pictures and topological intuition can only get us so far. To make their intuitions rigorous, topologists often have to convert their ideas into an algebraic or combinatorial form. With surfaces, our topological intuition got us to a plausible statement of the classification theorem. Presented with specific examples, like the "pants in sphere" surface, we could draw pictures to prove that it was not a counterexample to the theorem. But how could we expect to draw all possible surfaces? To prove the classification theorem, we had to convert it into a different kind of problem: describe the ways that triangles can be glued together to make a surface.

Here you can download Conway's zipproof of the classification theorem of surfaces: http://new.math.uiuc.edu/zipproof/zipproof.pdf

http://www.map.mpim-bonn.mpg.de/2-manifolds

References

[Hi05] Hitchin, N.: *Geometry of Surfaces.* http://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/hitchinnotes/Geometry_of_surfaces/Chapter_1_Topology.pdf

[Hi05] Hitchin, N.: *Geometry of Surfaces* http://people.maths.ox.ac.uk/hitchin/hitchinnotes/Geometry_of_surfaces/Chapter_3_Surfaces_in_R3.pdf

[Ja84] Jänich, K.: *Topology* http://www.amazon.com/gp/reader/0387908927/ref=sib_dp_pt#reader-link